Problemas matemáticos

David Hilbert

Tradución de Xosé Nicanor Alonso Álvarez

ATG
asociación de tradutores galegos

PRESENTACIÓN

París, mércores 8 de agosto de 1900. Celébrase o II Congreso Internacional de Matemáticos. David Hilbert, un dos máis destacados matemáticos da época, é o conferenciante invitado. No canto de presentar os últimos avances na súas investigacións, o ponente sorprende á audiencia presentando os que para el son os problemas nos que a ciencia matemática debe traballar nos próximos cen anos. Implicitamente, o reto de resolver calquera deles. O prestixio do orador dá categoría ás cuestións esbozadas, polo que todos os matemáticos da época ansían acadar a sona de ter solucionado algún dos enunciados da lista. A proposta de Hilbert marca o devenir da investigación matemática do século por comezar, e hoxe é sen dúbida a máis famosa conferencia sobre matemáticas xamais pronunciada. O que segue é unha tradución ao galego da ponencia, na que tomei como texto fonte a tradución ao inglés realizada baixo a supervisión do propio Hilbert por Mary Frances Winston Newson (primeira muller estadounidense en acadar un doctorado en Matemáticas por unha universidade europea), e publicada no *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 8, (1902), 437-479.

Por certo, dicir que máis de cen anos despois aínda quedan algúns problemas sen resolver ou resoltos só parcialmente. Pero iso é outra historia.

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Conferencia pronunciada ante o Congreso Internacional de Matemáticos en París en 1900.

Polo profesor David Hilbert.

Quen de nós non estaría satisfeito de levantar o veo detrás do cal xace agochado o futuro; botar unha ollada aos próximos avances da nosa ciencia e aos segredos do seu desenvolvemento durante os séculos futuros? Cara a que particulares obxectivos dirixirán os seus esforzos os líderes do espírito matemático das vindeiras xeracións? Que novos métodos e novos feitos serán revelados nos vindeiros séculos no vasto e rico campo do pensamento matemático?

A historia apréndenos a continuidade do desenvolvemento da ciencia. Sabemos que cada época ten os seus propios problemas, os cales a seguinte era resolve ou desbota por inútiles e reempraza por outros novos. Se tiveramos unha idea do probable desenvolvemento do coñecemento matemático no futuro inmediato, deberiamos deixar pasar as cuestións pendentes ante as nosas mentes e examinar os problemas que a ciencia de hoxe reúne e cuxa solución agardamos no futuro. Para tal revisión dos problemas, o día presente, tendido na unión dos séculos, paréceme ben axeitado. Pois o peche dunha grande época non só nos invita a ollar cara ao pasado, senón tamén dirixe os nosos pensamentos cara ao descoñecido futuro.

A profunda transcendencia de certos problemas para o avance da ciencia matemática en xeral e o importante papel que xogan no traballo do investigador individual son innegables. En tanto que unha rama da ciencia ofrece abundancia de problemas, está viva; a carencia de problemas augura a extinción ou o cese dun desenvolvemento independente. Igual que toda empresa humana persigue certos obxectivos, tamén a investigación matemática require os seus problemas. É mediante a solución de problemas que o investigador somete a proba o seu tempero; encontra novos métodos e novas perspectivas, e atinxe un horizonte máis amplo e libre.

É difícil e adoito imposible xulgar o valor dun problema con antelación; pois o premio final depende da ganancia que a ciencia obtén del. Non obstante podemos preguntar se existen criterios xerais que indiquen un bo problema matemático. Un vello matemático francés dixo: "Unha teoría matemática non pode considerarse completa ata que sexa feita tan clara que se poda explicar ao primeiro home ao que atopemos pola rúa". Esta claridade e facilidade de comprensión na que aquí se insiste para unha teoría matemática, eu a pediría todavía máis para un problema matemático se quere ser perfecto; pois o que é claro e facilmente comprendido atrae, o complicado repélenos.

Ademais un problema matemático debería ser difícil de cara a tentarnos, aínda que non completamente inaccesible, non vaia frustrar os nosos esforzos. Debería ser para nós unha guía situada nos labirínticos camiños cara as agochadas verdades, e finalmente un recordatorio do noso pracer no éxito da solución.

Os matemáticos de séculos pasados estaban afeitos a dedicarse á solución de difíciles problemas particulares con fervor apaixonado. Coñecían o valor dos problemas difíciles. Lémbrovos unicamente o "problema da liña de descenso máis rápido", proposto por John Bernouilli. A experiencia ensina, explica Bernouilli no anuncio público deste problema, que as elevadas mentes son conducidas a esforzarse polo avance da ciencia nada máis que por verse diante de problemas difíciles e ao mesmo tempo útiles, e por tanto el espera gañar o agradecemento do mundo matemático por seguir o exemplo de homes como Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani e outros, e presentar diante dos distinguidos analistas do seu tempo un problema que, como pedra de toque, poda someter a proba o valor dos seus métodos e a medida da súa fortaleza. O cálculo de variacións debe a súa orixe a este problema de Bernouilli e a problemas similares.

Fermat afirmou, como é ben coñecido, que a ecuación diofántica

$$x^n + y^n = z^n$$

(x, y e z enteiros) é irresoluble –excepto en certos casos evidentes–. O intento de probar esta imposibilidade ofrece un sorprendente exemplo do efecto inspirador que un problema moi especial e aparentemente sen importancia pode ter sobre a ciencia. Pois Kummer, incitado polo problema de Fermat, foi conducido á introdución dos números ideais e ao descubrimento da lei de descomposición única dos números dun corpo ciclotómico en factores primos ideais, –unha lei que hoxe, na súa xeneralización a calquera corpo alxebraico por Dedeking e Kronecker, está no centro da moderna teoría de números e cuxa importancia executándese moito máis aló das fronteiras da teoría de números entrando no terreo da álxebra e a teoría de funcións–.

Para falar dunha área de investigación moi diferente, lémbrovos o problema dos tres corpos. Os fructíferos métodos e os principios de longo alcance que Poincaré formulou en mecánica celeste, os cales son hoxe recoñecidos e aplicados en astronomía práctica, son debidos á circunstancia de que el se encargou de tratar de novo ese difícil problema e achegarse máis preto dunha solución.

Os dous últimos problemas mencionados –o de Fermat e o problema dos tres corpos– parécennos case como polos opostos –o primeiro unha libre invención da razón pura, pertencendo á área da teoría de números abstracta; o segundo, obrigado pola astronomía e necesario para o entendemento dos máis simples fenómenos fundamentais da natureza–. Pero ocorre adoito tamén que o mesmo problema especial encontra aplicación nas máis dispares ramas do coñecemento matemático. Así, por exemplo, o problema da liña máis curta xoga un papel clave e historicamente importante nos fundamentos da xeometría, na teoría de curvas e superficies, en mecánica e no cálculo de variacións. E como convincentemente describiu F. Klein, no seu traballo sobre o icosaedro, a importancia que corresponde ao problema dos poliedros regulares en xeometría elemental, en teoría de grupos, en teoría de ecuacións e na de ecuacións diferenciais lineais.

Para ilustrar a importancia de certos problemas, podo tamén mencionar a Weierstrass, que falaba da súa boa fortuna ao atopar ao comezo da súa carreira científica un problema no que traballar tan importante como o problema de inversión de Jacobi.

Tendo agora lembrado a importancia xeral dos problemas en matemáticas, volvamos á cuestión sobre as fontes das que obtén esta ciencia os seus problemas. Seguramente os primeiros e máis vellos problemas en cada rama das matemáticas saen da experiencia e son suxeridos polo mundo dos fenómenos externos. Mesmo as regras de cálculo con enteiros deben ter sido descubertas dese xeito nunha etapa máis baixa da civilización humana, así como os nenos de hoxe aprenden a aplicación desas leis por métodos empíricos. O mesmo é certo dos primeiros problemas da xeometría, os problemas que nos legou a antigüidade, tales como a duplicación do cubo, a cuadratura do círculo; tamén os máis vellos problemas na teoría da solución de ecuacións numéricas, na teoría de curvas e no cálculo diferencial e integral, no cálculo de variacións, a teoría de series de Fourier e a teoría do potencial, –por non falar da complementaria abundancia de problemas propiamente pertencentes á mecánica, á astronomía e á física–.

Pero, no posterior desenvolvemento dunha rama das matemáticas, a mente humana, animada polo éxito das súas solucións, vólvese consciente da súa independencia. Desenvolve por si mesma, frecuentemente sen influencia apreciable do exterior, por medio da combinación lóxica, xeneralización, especialización, separando e recollendo ideas de xeitos afortunados, novos e fructíferos problemas, e daquela aparece ela mesma como o interrogador real. Así xurdiu o problema dos números primos e os outros problemas da teoría de números, teoría de ecuacións de Galois, a teoría de invariantes alxebraicos, a teoría de funcións abelianas e automórficas; certamente case todas as máis atractivas cuestións da aritmética e teoría de funcións modernas xorden dese xeito.

No en tanto, mentres traballa o poder creativo da pura razón, o mundo exterior volve entrar outra vez en xogo, obrigándonos a novas preguntas sobre a experiencia real, abre novas ramas das matemáticas, e mentres buscamos conquistar eses novos campos do coñecemento para o terreo do pensamento puro, adoito atopamos as respostas para vellos problemas non resoltos e así ao mesmo tempo avanzan máis satisfactoriamente as vellas teorías. E seméllame que as numerosas e sorprendentes analoxías e esa aparentemente preconcertada harmonía que o matemático percibe acotío nas cuestións, métodos e ideas das diversas ramas da súa ciencia, teñen a súa orixe neste intercambio sempre recorrente entre pensamento e experiencia.

Queda por discutir brevemente que requisitos xerais poden ser xustamente establecidos para a solución dun problema matemático. Debo en primeiro lugar dicir isto: que debe ser posible establecer a corrección da solución mediante un número finito de pasos baseados nun número finito de hipóteses que están implicadas no enunciado do problema e as cales deben ser sempre exactamente formuladas. Este requisito de dedución lóxica por medio dun número finito de procesos é simplemente o requisito de rigor no razoamento. Certamente o requisito de rigor, que se converteu en proverbial en matemáticas, corresponde a unha necesidade filosófica universal do noso entendemento; e, por outra banda, unicamente satisfacendo este requisito contentamos o pensamento e a evocación do problema acada o seu pleno efecto. Un novo problema, especialmente cando procede do mundo exterior da experiencia, é como unha póla noviña que medra e dá froito unicamente cando é enxertada coidadosamente e de acordo coas estritas regras da horticultura sobre o vello talo, os logros establecidos da nosa ciencia matemática.

Ademais é un erro crer que o rigor na demostración é inimigo da simplicidade. Pola contra atopamos confirmado por numerosos exemplos que o método rigoroso é ao mesmo tempo o máis simple e o máis doadamente comprendido. O mesmo esforzo polo rigor obríganos a descubrir métodos máis simples de demostración. E tamén conduce frecuentemente ao camiño cara a métodos máis susceptibles de desenvolvemento que os vellos métodos de menos rigor. Así, a teoría de curvas alxebraicas experimentou unha considerable simplificación e acadou maior unidade mediante os métodos máis rigorosos da teoría de funcións e a introdución consistente de recursos transcendentes. Ademais, a demostración de que as series de potencias permiten a aplicación das catro operacións aritméticas elementais así como a diferenciación e a integración termo a termo, e o recoñecemento da utilidade das series de potencias supeditada a esta demostración, contribuíron materialmente á simplificación de toda a análise, particularmente da teoría de eliminación e da teoría de ecuacións diferenciais, e tamén das demostracións de existencia esixidas naquelas teorías. Pero o máis sorprendente exemplo da miña declaración é o cálculo de variacións. O tratamento da primeira e segunda variacións de integrais definidas requiría en parte cálculos extremadamente complicados, e os procedementos aplicados polos vellos matemáticos non tiñan o rigor necesario. Weierstrass amosounos o camiño cara a un fundamento novo e seguro do cálculo de variacións. Mediante os exemplos da integral simple e dobre amosarei brevemente, ao remate da miña conferencia, como este camiño conduce axiña a unha sorprendente simplificación do cálculo de variacións. Pois na demostración das condicións necesarias e suficientes para a existencia dun máximo e un mínimo, o cálculo da segunda variación e en parte, certamente, o aburrido razoamento conectado coa primeira variación, poden ser completamente obviados, –por non dicir nada do avance involucrado na eliminación da restrición a variacións para as cales os coeficientes diferenciais da función varían só lixeiramente–.

Aínda insistindo no rigor na demostración como requisito para a perfecta solución dun problema, gustaríame, por outra banda, opoñerme á opinión de que unicamente os conceptos da análise, ou mesmo os da aritmética soa, son susceptibles dun tratamento plenamente rigoroso. Considero esta opinión, ocasionalmente defendida por homes eminentes, completamente errónea. Tal interpretación unilateral do requisito de rigor conduciría logo á ignorancia de todos os conceptos derivados da xeometría, mecánica e física, á interrupción do fluxo de novo material procedente do mundo exterior, e finalmente, certamente, como a derradeira consecuencia, ao rexeitamento das ideas do continuo e de número irracional. Pero que importante nervio, vital para a ciencia matemática, sería cortado pola extirpación da xeometría e da física matemática! Pola contra penso que en calquera lugar onde xorden ideas matemáticas, da banda da teoría do coñecemento ou na xeometría, ou das teorías da ciencia natural ou física, o problema que se presenta para a ciencia matemática é investigar os principios subxacentes a esas ideas e tamén establecelas sobre un sistema simple e completo de axiomas, tal que a exactitude das novas ideas e a súa aplicabilidade para a dedución non sexa inferior en sentido ningún á dos vellos conceptos aritméticos.

A novos conceptos corresponden, necesariamente, novos símbolos. Escollémolos de xeito que nos recorden os fenómenos que foron a ocasión da formación dos novos conceptos. Así as figuras xeométricas son signos ou símbolos mnemotécnicos de intuición espacial, e son usados como tales por todos os matemáticos. Quen non usa sempre conxuntamente coa dobre desigualdade $a > b > c$ a imaxe de tres puntos seguidos nunha liña recta como imaxe xeométrica da idea "entre"? Quen non fai uso de debuxos de segmentos e rectángulos pechados uns noutros, cando é requirido probar con perfecto rigor un difícil teorema sobre a continuidade de funcións ou a existencia de puntos de acumulación? Quen podería prescindir da figura do triángulo, o círculo co seu centro, ou a intersección de tres eixes perpendiculares? Ou quen abandonaría a representación do campo vectorial, ou a imaxe dunha familia de curvas ou superficies coa súa envolvente que xoga tan importante papel en xeometría diferencial, na teoría de ecuacións diferenciais, nos fundamentos do cálculo de variacións e noutras ciencias puramente matemáticas?

Os símbolos aritméticos son diagramas escritos e as figuras xeométricas son fórmulas gráficas; e matemático ningún podería evitar estas fórmulas gráficas, como tampouco podería prescindir no cálculo da introdución e eliminación de parénteses ou do uso doutros símbolos analíticos.

O uso de símbolos xeométricos como un medio de demostración estrito presupón o coñecemento exacto e o dominio completo dos axiomas que sustentan aquelas figuras; e para que estas figuras xeométricas podan ser incorporadas ao tesouro xeral dos símbolos matemáticos, cómpre unha investigación axiomática rigorosa do seu contido conceptual. Igual que sumando dous números, un debe colocar os díxitos un debaixo doutro na orde correcta, e así unicamente as regras do cálculo, i. e., os axiomas da aritmética, determinan o uso correcto dos díxitos, así o uso de símbolos xeométricos está determinado polos axiomas dos conceptos xeométricos e as súas combinacións.

O acordo entre pensamento xeométrico e aritmético amósase tamén en que non seguimos habitualmente a cadea de razoamento dende os axiomas na aritmética, como tampouco nas discusións xeométricas. Pola contra aplicamos, especialmente no primeiro ataque a un problema, unha combinación rápida, inconsciente, non absolutamente segura, confiando nunha certa sensibilidade aritmética do comportamento dos símbolos aritméticos, dos cales poderiamos prescindir tan pouco en aritmética como da imaxinación xeométrica en xeometría. Como exemplo dunha teoría aritmética que opera rigorosamente con ideas xeométricas e símbolos, podo mencionar o traballo de Minkowski, Die Geometrie der Zahlen.[1]

Neste lugar poden darse algúns comentarios sobre as dificultades que os problemas matemáticos poden ofrecer, e os medios de superalas.

Se non temos éxito na solución dun problema matemático, a razón consiste adoito no noso fracaso para recoñecer o punto de vista máis xeral dende o cal o problema ante nós aparece unicamente como un simple elo nunha cadea de problemas relacionados. Logo de atopar este punto de vista, non só é con frecuencia este problema máis accesible á nosa investigación, senón que ao mesmo tempo entramos en posesión dun método aplicable tamén a problemas relacionados. A introdución de camiños de integración complexos por Cauchy e a da noción de ideais en teoría de números por Kummer poden servir como

[1]Leipzig, 1896.

exemplos. Este camiño para atopar métodos xerais é certamente o máis viable e o máis seguro; pois quen busque métodos sen ter un problema definido en mente busca a maioría das veces en vano.

Ao tratar con problemas matemáticos, a especialización xoga, creo eu, un rol aínda máis importante que a xeneralización. Se cadra na maioría dos casos en que buscamos en vano a resposta a unha cuestión, a causa do fracaso radica no feito de que problemas máis sinxelos e máis doados que o que temos entre mans foron ou non resoltos en absoluto ou de xeito incompleto. Todo depende, entón, de descubrir eses problemas máis doados, e de resolvelos mediante recursos tan perfectos como sexa posible e conceptos susceptibles de xeneralización. Esta regra é unha das máis importantes pancas para vencer dificultades matemáticas, e paréceme que é utilizada case sempre, aínda que se cadra inconscientemente.

Ocasionalmente acontece que buscamos a solución baixo hipóteses insuficientes ou nun sentido incorrecto, e por esa razón non temos éxito. Entón xorde o problema: amosar a imposibilidade de solución baixo as hipóteses dadas, ou no sentido contemplado. Tales demostracións de imposibilidade foron levadas a cabo polos antigos, por exemplo cando probaron que a razón entre a hipotenusa e un lado dun triángulo rectángulo isóscele é irracional. En matemáticas posteriores, a cuestión da imposibilidade de certas solucións xoga un papel preeminente, e percibimos dese xeito que vellos e difíciles problemas, tales como a demostración do axioma das paralelas, a cuadratura do círculo, ou a solución de ecuacións de quinto grao por radicais, atoparon finalmente solucións plenamente satisfactorias e rigorosas, aínda que noutro sentido diferente do orixinalmente previsto. É probablemente este importante feito xunto con outras razóns filosóficas o que dá lugar á convicción (a cal comparten todos os matemáticos, pero ningún corroborou aínda cunha demostración) de que todo problema matemático definido debe ser necesariamente susceptible dun acordo exacto, ben na forma dunha resposta real á cuestión preguntada, ben pola demostración da imposibilidade da súa solución e con iso o necesario fracaso de todos os intentos. Tomemos calquera problema definido non resolto, tal como a cuestión da irracionalidade da constante C de Euler-Mascheroni, ou a existencia dun infinito número de números primos da forma $2^n + 1$. Independentemente do inabordables que eses problemas podan parecernos e sen importar o incapaces que nos recoñecemos ante eles, temos, con todo, a firme convicción de que as súas solucións deben seguirse por un número finito de procesos puramente lóxicos.

É este axioma da resolubilidade de todo problema unha característica peculiar unicamente do pensamento matemático, ou é posible que sexa unha lei xeral inherente á natureza da mente, pola que todas a cuestións que pregunta deben ser contestables? Pois noutras ciencias tamén atopamos vellos problemas que foron resoltos do xeito máis satisfactorio e máis útil para a ciencia pola demostración da súa imposibilidade. Cito como exemplo o problema do movemento perpetuo. Logo de buscar en vano a construción dunha máquina de movemento perpetuo, foron investigadas as relacións que deben subsistir entre as forzas da natureza se tal máquina é imposible[2]; e esta cuestión invertida levou ao descubrimento da lei de conservación da enerxía, a cal, de novo, explicou a imposibilidade do movemento perpetuo no sentido orixinalmente planeado.

Esta convicción na resolubilidade de todo problema matemático é un poderoso incentivo para o traballador. Sentimos dentro de nós a perpetua chamada: Existe un problema. Busca a súa solución. Podes atopala pola pura razón, pois en matemáticas non existe o *ignorabimus*.

O subministro de problemas en matemáticas é inesgotable, e tan logo como un problema é resolto moitos outros veñen ocupar o seu lugar. Permítanme no que segue, por provisionalmente que sexa, mencionar problemas concretos definidos, recollidos de varias ramas das matemáticas, a partir de cuxa discusión pode agardarse un avance da ciencia.

Consideremos os principios da análise e a xeometría. Os máis suxestivos e notables logros do último século neste campo son, paréceme, a formulación aritmética do concepto do continuo nos traballos de Cauchy, Bolzano e Cantor, e o descubrimento da xeometría non euclídea por Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Por tanto dirixirei primeiro a súa atención cara a algúns problemas pertencentes a eses campos.

[2]Ver Helmholtz, "Ueber die Wechselwirkung der Naturkräefte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physic"; Vortrag, gehalten in Königsberg, 1854.

1. PROBLEMA DE CANTOR DO NÚMERO CARDINAL DO CONTINUO.

Dous sistemas, i. e., dous conxuntos de números reais ordinarios ou de puntos, son (segundo Cantor) equivalentes ou do mesmo *número cardinal*, se poden ser postos nunha relación un co outro de xeito que a cada número dun conxunto lle corresponde un e só un número definido do outro. As investigacións de Cantor sobre tales conxuntos de puntos suxiren un teorema moi plausible, o cal non obstante, malia os máis extenuantes esforzos, ninguén foi quen de demostrar. Este é o teorema:

Todo sistema de infinitos números reais, i. e., todo conxunto de números (ou puntos), é ou equivalente ao conxunto dos enteiros naturais, 1, 2, 3,... ou ao conxunto de todos os números reais e por tanto ao continuo, é dicir, aos puntos dunha recta; *en canto á equivalencia existen, xa que logo, unicamente dous conxuntos de números, o conxunto numerable e o continuo.*

Deste teorema seguiría de inmediato que o continuo ten o seguinte número cardinal máis alá do do conxunto numerable; a demostración deste teorema constituiría, por tanto, unha nova ponte entre o conxunto numerable e o continuo.

Permítanme mencionar outro enunciado moi notable de Cantor que está na máis íntima conexión co teorema mencionado e o cal, quizais, ofrece a chave para a súa demostración. Calquera sistema de números reais dise ordenado, se para cada dous números do sistema está determinado cal é o anterior e cal é o posterior, e se ao mesmo tempo esta determinación é dun tipo tal que, se a é anterior a b e b é anterior a c, entón a é sempre anterior a c. A disposición natural dos números dun sistema defínese como aquela na cal o máis pequeno precede ao máis grande. Pero existen, como é doado ver, outros infinitos camiños nos cales poden ser dispostos os números dun sistema.

Se pensamos nunha disposición definida de números e seleccionamos de entre eles un sistema particular deses números, un denominado subsistema ou subconxunto, tamén se probará que este subsistema está ordenado. Agora Cantor considera un tipo particular de conxunto ordenado ao cal designa como conxunto ben ordenado e que está caracterizado deste xeito, que non unicamente no propio conxunto senón tamén en calquera subconxunto existe un primeiro número. O sistema de enteiros 1, 2, 3, ... na súa orde natural é evidentemente un conxunto ben ordenado. Por outra banda o sistema de todos os números reais, i. e., o continuo na súa orde natural, é evidentemente non ben ordenado. Pois, se pensamos nos puntos dun segmento dunha liña recta, co seu punto inicial excluído, como o noso subconxunto, este non terá primeiro elemento.

Xorde agora a cuestión de se a totalidade dos números non pode dispoñerse doutro xeito tal que todo subconxunto poda ter un primeiro elemento, i. e., se o continuo non pode ser considerado como un conxunto ben ordenado –a pregunta que Cantor pensa debe ser respondida afirmativamente–. Paréceme moi desexable obter unha demostración directa deste notable enunciado de Cantor, se cadra dando realmente unha disposición de números tal que en todo subsistema poda ser sinalado un primeiro número.

2. A COMPATIBILIDADE DOS AXIOMAS DA ARITMÉTICA.

Cando nos involucramos en investigar os fundamentos dunha ciencia, debemos establecer un sistema de axiomas que conteña unha exacta e completa descrición das relacións existentes entre as nocións elementais desa ciencia. Os axiomas así establecidos son ao mesmo tempo as definicións daquelas nocións elementais; e ningún enunciado dentro do ámbito da ciencia cuxo fundamento estamos examinando é considerado correcto agás que poda ser derivado daqueles axiomas por medio dun número finito de pasos lóxicos. Sobre unha consideración máis próxima xorde a cuestión: *Se, dalgún xeito, certos enunciados de axiomas individuais dependen uns dos outros, e se por tanto os axiomas non poden conter certas partes en común, as cales deben ser illadas se queremos chegar a un sistema de axiomas que sexan completamente independentes uns doutros.*

Pero por riba de todo desexo sinalar a seguinte como a máis importante entre as numerosas cuestións que poden ser preguntadas en relación aos axiomas: *Probar que non son contraditorios, é dicir, que un número finito de pasos lóxicos baseados neles nunca poden conducir a resultados contraditorios.*

En xeometría, a demostración da compatibilidade dos axiomas pode ser efectuada construíndo un campo de números adecuado, tal que relacións análogas entre os números deste campo correspondan aos axiomas xeométricos. Calquera contradición nas deducións a resultas dos axiomas xeométricos debe por tanto ser recoñecible na aritmética deste campo de números. Dese xeito a desexada demostración da compatibilidade dos axiomas xeométricos faise depender do teorema da compatibilidade dos axiomas aritméticos.

Por outra banda, cómpre un método directo para a demostración da compatibilidade dos axiomas aritméticos. Os axiomas da aritmética non son esencialmente nada máis que as regras de cálculo coñecidas, coa adición do axioma de continuidade. Eu recompileinos recentemente[3] e ao facelo substituín o axioma de continuidade por dous axiomas máis simples, a saber, o ben coñecido axioma de Arquímedes, e un novo axioma que esencialmente é como segue: que os números forman un sistema de obxectos incapaz de posterior extensión, en tanto que se conserven os outros axiomas (axioma de completitude). Estou convencido de que debe ser posible atopar unha demostración directa da compatibilidade dos axiomas aritméticos, por medio dun estudio coidadoso e unha modificación adecuada dos métodos de razoamento coñecidos na teoría dos números irracionais.

Para amosar a importancia do problema dende outro punto de vista, engado a seguinte observación: Se son asignadas propiedades contraditorias a un concepto, eu digo que *matematicamente o concepto non existe*. Así, por exemplo, un número real cuxo cadrado é -1 non existe matematicamente. Pero se pode ser probado que as propiedades asignadas ao concepto nunca poden levar a unha contradición pola aplicación dun número finito de pasos lóxicos, eu digo que a existencia matemática do concepto (por exemplo, dun número ou unha función que satisfai certas condicións) está así probada. No caso que temos ante nós, onde estamos interesados nos axiomas dos números reais en aritmética, a demostración da compatibilidade dos axiomas é ao mesmo tempo a demostración da existencia matemática do sistema completo de números reais ou do continuo. Certamente, cando a demostración da compatibilidade dos axiomas sexa plenamente acadada, as dúbidas que ocasionalmente foron expresadas sobre a existencia do sistema completo dos números reais converteranse nalgo totalmente sen fundamento. A totalidade dos números reais, i. e., o continuo de acordo co punto de vista recentemente indicado, non é o conxunto de todas as posibles series de fraccións decimais, ou de todas as posibles leis de acordo coas cales poden proceder os elementos dunha secuencia fundamental. É máis ben un sistema de obxectos cuxas mutuas relacións están gobernadas polos axiomas establecidos e para os cales son certas todas as proposicións, e unicamente aquelas, que poden ser derivadas dos axiomas mediante un número finito de pasos lóxicos. Na miña opinión, o concepto do continuo é estrita e loxicamente sostible unicamente neste senso. Paréceme, certamente, que isto corresponde tamén mellor ao que a experiencia e a intuición nos din. O concepto do continuo ou mesmo o do sistema de todas as funcións existe, daquela, exactamente no mesmo sentido que o sistema de números racionais, por exemplo, ou que as clases máis altas de números e números cardinais de Cantor. Pois estou convencido de que a existencia dos últimos, igual que a do continuo, pode ser probada no sentido que describín; a diferenza do sistema de todos os números cardinais ou de *todos* os alephs de Cantor, para os cales, como pode ser probado, un sistema de axiomas, compatible no meu sentido, non pode ser establecido. Cada un destes sistemas é, por tanto, de acordo coa miña terminoloxía, matematicamente non existente.

Do campo dos fundamentos da xeometría gustaríame mencionar o seguinte problema:

[3] *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol 8 (1900), p. 180.

3. A IGUALDADE DOS VOLUMES DE DOUS TETRAEDROS DE IGUAL BASE E IGUAL ALTURA.

En dúas cartas a Gerling, Gauss[4] expresa o seu pesar porque certos teoremas da xeometría de sólidos dependan do método de exhaución, i. e., en terminoloxía moderna, do axioma de continuidade (ou do axioma de Arquímedes). Gauss menciona en concreto o teorema de Euclides, de que nas pirámides triangulares que teñen a mesma altura o volume é proporcional ás súas bases. Actualmente, o problema análogo no plano foi resolto[5]. Gerling tamén acadou probar a igualdade do volume de poliedros simétricos dividíndoos en partes congruentes. Con todo, paréceme probable que unha demostración xeral deste tipo para o teorema de Euclides anteriormente mencionado sexa imposible, e a nosa tarefa debería ser dar unha demostración rigorosa da súa imposibilidade. Isto sería conseguido, tan pronto como lográramos *especificar dous tetraedros de iguais bases e iguais alturas os cales non podan ser divididos de xeito ningún en tetraedros congruentes, e que non podan ser combinados con tetraedros congruentes para formar dous poliedros que puideran ser divididos eles mesmos en tetraedros congruentes.*[6]

4. PROBLEMA DA LIÑA RECTA COMO A DISTANCIA MÁIS CURTA ENTRE DOUS PUNTOS.

Outro problema relativo aos fundamentos da xeometría é este: se de entre os axiomas necesarios para establecer a xeometría euclídea ordinaria excluímos o axioma das paralelas, ou supoñemos que non se satisfai, pero conservamos todos os demais axiomas, obtemos, como é ben coñecido, a xeometría de Lobachevsky (xeometría hiperbólica). Podemos por tanto dicir que esta é unha xeometría próxima á xeometría euclídea. Se ademais esiximos que non se satisfaga aquel axioma polo cal, dados tres puntos dunha liña recta, un e unicamente un estea entre os outros dous, obtemos a xeometría de Riemann (elíptica), así que esta xeometría parece ser a seguinte despois da de Lobachevsky. Se desexamos realizar unha investigación similar con respecto ao axioma de Arquímedes, debemos considerar que este non se satisfai, e chegamos deste xeito ás xeometrías non arquimedianas, as cales foron investigadas por Veronese e eu mesmo. Agora xorde a cuestión máis xeral: Se dende outros suxestivos puntos de vista non poden ser concibidas xeometrías tales que, con igual dereito, estean próximas á xeometría euclídea. Aquí gustaríame dirixir a súa atención cara a un teorema que ten sido certamente empregado por moitos autores como unha definición de liña recta, concretamente, que a liña recta é a distancia máis curta entre dous puntos. O contido esencial deste enunciado redúcese ao teorema de Euclides de que nun triángulo a suma de dous lados é sempre maior que a do terceiro lado, –un teorema que, como se ve facilmente, trata unicamente sobre conceptos elementais, i. e., como os que son derivados directamente dos axiomas, e é por tanto máis accesible á investigación lóxica–. Euclides probou este teorema, coa axuda do teorema do ángulo exterior, sobre a base dos teoremas de congruencia. Agora amósase inmediatamente que este teorema de Euclides non pode ser probado unicamente sobre a base daqueles teoremas de congruencia relacionados coa aplicación de segmentos e ángulos, senón que é necesario un dos teoremas sobre a congruencia de triángulos. Estamos preguntando, daquela, por unha xeometría na cal son válidos todos os axiomas da xeometría euclídea ordinaria, e en particular todos os axiomas de congruencia excepto o da congruencia de triángulos (ou todos excepto o teorema da igualdade dos ángulos da base no triángulo isóscele), e

[4] Werke, vol. 8, pp. 241 e 244.

[5] Cf., xunto con literatura anterior, Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, ch. 4. [Traducido por Townsend, Chicago, 1902.]

[6] Dende que isto foi escrito Herr Dehn deu probado a súa imposibilidade. Ver o traballo "Ueber raumgleiche Polyeder", en *Nachrichten d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen*, 1900, e un artigo próximo a aparecer nos *Math. Annalen* [vol. 55, pp. 465-478].

na cal, ademais, a proposición de que en todo triángulo a suma de dous lados e maior que o terceiro é asumida como axioma particular.

Resulta que tal xeometría existe realmente e non é outra que aquela que Minkowski construíu no seu libro, Geometrie der Zahlen[7], e formou a base das súas investigacións aritméticas. Por iso a de Minkowski é tamén unha xeometría que está preto da xeometría euclídea ordinaria; está caracterizada esencialmente polas seguintes condicións:

1. Os puntos que están a iguais distancias dun punto fixo O xacen nunha superficie pechada convexa do espazo euclídeo ordinario con O como centro.

2. Dise que dous segmentos son iguais cando un pode ser superposto ao outro por unha translación do espazo euclídeo ordinario.

Na xeometría de Minkowski o axioma das paralelas tamén se conserva. Estudiando o teorema da liña recta como a distancia máis curta entre dous puntos, eu cheguei[8] a unha xeometría na que o axioma das paralelas non é válido, mentres se cumpren todos os demais axiomas da xeometría de Minkowski. O teorema da liña recta como a distancia máis curta entre dous puntos e o teorema esencialmente equivalente de Euclides sobre os lados dun triángulo, xogan un papel importante non soamente na teoría de números, senón tamén na teoría de superficies e no cálculo de variacións. Por esta razón, e porque creo que a minuciosa investigación das condicións para a validez deste teorema proxectará unha nova luz sobre a idea de distancia, así como sobre outras ideas elementais, e. g., sobre a idea do plano, e a posibilidade da súa definición por medio da idea da liña recta, *a construción e tratamento sistemático das xeometrías posibles paréceme desexable.*

5. O CONCEPTO DE LIE DE GRUPO CONTINUO DE TRANSFORMACIÓNS SEN A SUPOSICIÓN DA DIFERENCIABILIDADE DAS FUNCIÓNS QUE DEFINEN O GRUPO.

É ben coñecido que Lie, coa axuda do concepto de grupos continuos de transformacións, estableceu un sistema de axiomas xeométricos e, dende o punto de vista da súa teoría de grupos, probou que este sistema de axiomas basta para a xeometría. Pero dado que Lie supón, no mesmo fundamento da súa teoría, que as funcións que definen o seu grupo poden ser diferenciadas, queda sen decidir no desenrolo de Lie, se a suposición da diferenciabilidade en conexión coa cuestión respecto aos axiomas da xeometría é realmente inevitable, ou se non pode aparecer máis ben como consecuencia do concepto de grupo e os outros axiomas xeométricos. Esta consideración, así como algúns outros problemas en conexión cos axiomas aritméticos, leva ante nós a cuestión máis xeral: *Ata onde podemos achegarnos nas nosas investigacións sobre o concepto de Lie de grupos continuos de transformacións sen a suposición da diferenciabilidade das funcións.*

Lie define un grupo continuo finito de transformacións como un sistema de transformacións

$$x_i' = f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r) \qquad (i = 1, ..., n)$$

tendo a propiedade de que calquera dúas transformacións do sistema escollidas arbitrariamente, como

$$x_i' = f_i(x_1, ..., x_n; a_1, ..., a_r),$$
$$x_i'' = f_i(x_1', ..., x_n'; b_1, ..., b_r),$$

aplicadas sucesivamente dan lugar a unha transformación que tamén pertence ao sistema, e que é por tanto expresable na forma

$$x_i'' = f_i\{f_1(x, a), ..., f_n(x, a); b_1, ..., b_r\} = f_i(x_1, ..., x_n; c_1, ..., c_r),$$

[7]Leipzig, 1896.

[8]*Math. Annalen*, vol.46, p. 91.

onde c_1, ..., c_r son certas funcións de a_1, ..., a_r e b_1, ..., b_r. A propiedade de grupo atopa deste xeito a súa plena expresión nun sistema de ecuacións funcionais e dela mesma non se obrigan restricións adicionais sobre as funcións f_1, ..., f_n; c_1, ..., c_r. Pero o tratamento máis extenso de Lie destas ecuacións funcionais, concretamente, a derivación das ben coñecidas ecuacións diferenciais fundamentais, supón necesariamente a continuidade e a diferenciabilidade das funcións que definen o grupo.

Con relación á continuidade: este postulado será certamente conservado polo de agora –unicamente con vistas ás aplicacións xeométricas e aritméticas, nas cales a continuidade das funcións en cuestión aparece como consecuencia do axioma de continuidade–. Por outra banda a diferenciabilidade das funcións que definen o grupo contén un postulado que, nos axiomas xeométricos, só pode ser expresado dun xeito abondo forzado e complicado. Por conseguinte xorde a cuestión de se, a través da introdución de novas variables e parámetros axeitados, o grupo pode ser sempre transformado noutro cuxas funcións definitorias son diferenciables; ou se, alomenos coa axuda de certas hipóteses simples, é posible unha transformación en grupos que admiten métodos de Lie. Unha redución a grupos analíticos é, de acordo co teorema anunciado por Lie[9] pero probado primeiro por Schur,[10] sempre posible cando o grupo é transitivo e é asumida a existencia da primeira e algunhas segundas derivadas das funcións que definen o grupo.

Para grupos infinitos a investigación da cuestión correspondente é, creo eu, tamén de interese. Ademais somos conducidos deste xeito ao amplo e interesante campo das ecuacións funcionais que foron ata o de agora investigadas normalmente só baixo a hipótese da diferenciabilidade das funcións involucradas. En particular as ecuacións funcionais tratadas por Abel[11] con tanto enxeño, as ecuacións en diferenzas, e outras ecuacións existentes na literatura matemática, non implican directamente nada que necesite o requisito da diferenciabilidade das funcións acompañantes. Na procura de certas demostracións de existencia no cálculo de variacións eu cheguei directamente a este problema: Probar a diferenciabilidade da función en consideración a resultas da existencia dunha ecuación en diferenzas. En todos estes casos, entón, xorde o problema: *Ata que punto son certas as afirmacións que podemos facer no caso de funcións diferenciables baixo modificacións axeitadas sen esta hipótese?*

Pode observarse ademais que H. Minkowski na súa anteriormente mencionada Geometrie der Zahlen comeza coa ecuación funcional

$$f(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \leq f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, ..., y_n)$$

e a partires desta acada de feito a probar a existencia de certos cocientes diferenciais para a función en cuestión.

Por outra banda desexo recalcar o feito de que existen certamente ecuacións funcionais analíticas cuxas únicas solucións son funcións non diferenciables. Por exemplo pode ser construída unha función non diferenciable continua e uniforme $\varphi(x)$ que representa a única solución das dúas ecuacións funcionais

$$\varphi(x + \alpha) - \varphi(x) = f(x), \qquad \varphi(x + \beta) - \varphi(x) = 0,$$

onde α e β son dous números reais, e $f(x)$ denota, para todos os valores reais de x, unha función uniforme analítica e regular. Tales funcións son obtidas do xeito máis simple mediante series trigonométricas por un proceso similar ao usado por Borel (de acordo cun recente anuncio de Picard)[12] para a construción dunha solución non analítica e dobremente periódica dunha certa ecuación en derivadas parciais analítica.

[9]Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, vol. 3, Leipzig, 1893, §82, 144.

[10]"Ueber den analytischen Charakter der eine endliche Kontinuierliche Transformationsgruppen darstellendenFunktionen", *Math. Annalen*, vol. 41.

[11]Werke, vol. 1, pp. 1, 61, 389.

[12]Picard, '"Quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique", Conferencias na Clark University, *Revue générale des Sciences*, 1900, p. 22.

6. TRATAMENTO MATEMÁTICO DOS AXIOMAS DA FÍSICA.

As investigacións sobre os fundamentos da xeometría suxiren o problema: *Tratar do mesmo xeito, mediante axiomas, aquelas ciencias físicas nas cales a matemática xoga un papel importante; no primeiro nivel están a teoría de probabilidades e a mecánica.*

Con respecto aos axiomas da teoría de probabilidades,[13] paréceme desexable que a súa investigación lóxica fora acompañada por un desenvolvemento rigoroso e satisfactorio do método dos valores medios en física matemática, e en particular na teoría cinética dos gases.

Temos a man importantes investigacións dos físicos sobre os fundamentos da mecánica; remítome aos escritos de Mach[14], Hertz[15], Boltzmann[16] e Volkmann[17]. É por tanto moi desexable que a discusión dos fundamentos da mecánica sexa emprendida tamén polos matemáticos. Así o traballo de Boltzmann sobre os principios da mecánica suxire o problema de desenvolver matematicamente os procesos de paso ao límite, alí meramente indicados, os cales conducen dende a visión atomística ás leis de movemento dos continuos. Reciprocamente podería intentarse derivar as leis do movemento dos corpos ríxidos por un proceso de paso ao límite a partir dun sistema de axiomas dependentes da idea de condicións continuamente variables dun material que enche de xeito continuo todo o espazo, estando definidas estas condicións por parámetros. Pois a cuestión da equivalencia de diferentes sistemas de axiomas é sempre de grande interese teórico.

Se a xeometría vai servir como modelo para o tratamento de axiomas físicos, intentaremos primeiro incluír por medio dun pequeno número de axiomas unha clase o máis grande posible de fenómenos físicos, e daquela, pola adxunción de novos axiomas, chegar gradualmente ata as teorías máis especiais. Ao mesmo tempo un principio de subdivisión de Lie pode se cadra ser derivado dende a profunda teoría dos grupos de transformación infinitos. Os matemáticos terán tamén que ter en conta non só aquelas teorías próximas á realidade, senón tamén, como en xeometría, todas as teorías loxicamente posibles. Deben estar sempre alerta para obter unha visión xeral completa de todas as conclusións derivables a partir do sistema de axiomas suposto.

Ademais, o matemático ten o deber de examinar exactamente en cada caso se os novos axiomas son compatibles cos anteriores. O físico, cando desenvolve as súas teorías, atópase con frecuencia obrigado polos resultados dos seus experimentos a dar novas hipóteses, aínda que depende, con respecto á compatibilidade das novas hipóteses cos vellos axiomas, unicamente destes experimentos ou dunha certa intuición física, unha práctica que non é admisible na construción rigorosamente lóxica dunha teoría. A desexada demostración da compatibilidade de todas as hipóteses paréceme tamén de importancia, porque o esforzo para obter tal demostración sempre nos obriga máis eficazmente a unha formulación exacta dos axiomas.

Ata agora consideramos unicamente cuestións relativas aos fundamentos das ciencias matemáticas. Certamente, o estudio dos fundamentos dunha ciencia é sempre particularmente atractivo, e o exame destes fundamentos estará sempre entre os principais problemas do investigador. Weierstrass dixo unha vez, "O obxectivo final a ter en mente é sempre chegar a un correcto entendemento dos fundamentos da ciencia... Pero para facer calquera progreso nas ciencias é por suposto indispensable o estudio de problemas concretos". De feito, unha minuciosa comprensión das súas teorías especiais é necesaria para o tratamento competente dos fundamentos da ciencia. Unicamente está en posición de poñer unha base segura para unha estrutura ese arquitecto que coñece minuciosamente e en detalle o seu obxectivo. De xeito

[13]Cf. Bohlmann, "Ueber Versicherungsmathematik", da colección: Klein and Riecke, Ueber angewandte Mathematik und Physik, Leipzig, 1900.

[14]Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Leipzig, 4ª edición, 1901.

[15]Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, 1894.

[16]Vorlesungen über die Principe der Mechanik, Leipzig, 1897.

[17]Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig, 1900.

que agora comezaremos cos problemas especiais das ramas separadas das matemáticas e consideraremos primeiro a aritmética e a álxebra.

7. IRRACIONALIDADE E TRANSCENDENCIA DE CERTOS NÚMEROS.

Os teoremas aritméticos de Hermite sobre a función exponencial e a súa extensión por Lindemann son certamente de admiración por todas a xeracións de matemáticos. Por conseguinte a tarefa que de inmediato se presenta é penetrar máis ao longo no camiño aquí introducido, como A. Hurwitz fixo xa en dous interesantes artigos,[18] "Ueber arithmetische Eigenschaften gewiser transzendenter Funktionen". Gustaríame, por tanto, esbozar unha clase de problemas que, na miña opinión, deberían ser atacados aquí na seguinte orde. Que certas funcións transcendentes especiais, importantes na análise, tomen valores alxebraicos para certos argumentos alxebraicos, parécenos particularmente notable e merecedor dunha minuciosa investigación. Certamente, esperamos que as funcións transcendentes tomen, en xeral, valores transcendentes mesmo para argumentos alxebraicos; e, aínda que é ben coñecido que existen funcións transcendentes enteiras que mesmo teñen valores racionais para todos os argumentos alxebraicos, todavía consideraremos altamente probable que a función exponencial $e^{i\pi z}$, por exemplo, a cal evidentemente ten valores alxebraicos para todos os argumentos racionais z, tomará sempre por outra banda valores transcendentes para valores alxebraicos irracionais do argumento z. Podemos tamén dar a este enunciado unha forma xeométrica, como segue:

Se, nun triángulo isósceles, a razón do ángulo da base co ángulo do vértice é alxebraica pero non racional, a razón entre base e lado é sempre transcendente.

Malia a simplicidade deste enunciado e a súa similitude cos problemas resoltos por Hermite e Lindemann, considero a demostración deste teorema moi difícil, como tamén a demostración de que:

A expresión α^β, para unha base alxebraica α e un expoñente alxebraico irracional β, e. g., o número $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, sempre representa un número transcendente ou alomenos un número irracional.

É certo que a solución destes e semellantes problemas debe conducirnos a métodos enteiramente novos e a unha nova percepción sobre a natureza dos números irracionais e transcendentes especiais.

8. PROBLEMAS DE NÚMEROS PRIMOS.

Progresos esenciais na teoría da distribución de números primos foron feitos recentemente por Hadamard, de la Vallée-Poussin, Von Mangoldt e outros. Porén, para a solución completa dos problemas recollidos no artigo de Riemann "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", aínda queda por probar a corrección dun extremadamente importante enunciado de Riemann, concretamente, *que os ceros da función $\zeta(s)$ definida pola serie*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ...$$

teñen todos parte real $\frac{1}{2}$, excepto os ben coñecidos ceros reais enteiros negativos. Tan logo esta demostración sexa establecida con éxito, o seguinte problema consistiría en examinar máis exactamente a serie infinita de Riemann para o número de primos por debaixo dun número dado e, especialmente, *decidir se a diferenza entre o número de primos por debaixo dun número x e o logaritmo enteiro de x chega a ser de feito infinito dunha orde non maior que $\frac{1}{2}$ en x.*[19] Ademais, deberiamos determinar se

[18] *Math. Annalen*, vols. 22, 32 (1883, 1888).

[19] Cf. un artigo de H. von Koch, próximo a aparecer en *Math. Annalen* [Vol. 55, p. 441].

a condensación ocasional de números primos que foi observada ao contar primos é realmente debida a aqueles termos da fórmula de Riemann que dependen dos primeiros ceros complexos da función $\zeta(s)$.

Logo dunha exhaustiva discusión da fórmula de números primos de Riemann, poderemos se cadra estar algunha vez en posición de intentar acadar a solución rigorosa do problema de Goldbach,[20] concretamente, se todo enteiro é expresable como a suma de dous números primos positivos; e ademais atacar a ben coñecida cuestión de se existe un número infinito de pares de números primos cuxa diferenza sexa 2, ou mesmo o problema máis xeral de se a ecuación diofántica lineal

$$ax + by + c = 0$$

(con coeficientes enteiros coprimos dados) é sempre resoluble en números primos x e y.

Pero o seguinte problema non me parece de menor interese e se cadra sexa aínda de máis amplo rango: *Aplicar os resultados obtidos para a distribución de números primos racionais á teoría da distribución de primos ideais nun corpo de números* k -un problema que mira cara o estudio da función $\zeta_k(s)$ pertencente ao corpo e definida pola serie

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(j)^s},$$

onde a suma se estende sobre todos os ideais j do corpo dado k, e $n(j)$ denota a norma do ideal j.

Podo mencionar tres problemas especiais máis en teoría de números: un sobre as leis de reciprocidade, outro sobre ecuacións diofánticas, e un terceiro procedente do campo das formas cadráticas.

9. DEMOSTRACIÓN DA LEI DE RECIPROCIDADE MÁIS XERAL EN CALQUERA CORPO DE NÚMEROS.

Para calquera corpo de números a lei de reciprocidade debe ser probada para os residuos da l-ésima potencia, cando l denota un primo impar, e ademais cando l é unha potencia de 2 ou unha potencia dun primo impar.

A lei, así como os medios esenciais para a súa demostración, será, creo eu, resultado da adecuada xeneralización da teoría do corpo das l-ésimas raíces da unidade,[21] desenvolvida por min, e a miña teoría de corpos cadráticos relativos.[22]

10. DETERMINACIÓN DA RESOLUBILIDADE DUNHA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

Dada unha ecuación diofántica con calquera número de incógnitas e con coeficientes numéricos enteiros racionais: *Idear un proceso de acordo co cal poda ser determinado por un número finito de operacións se a ecuación é resoluble en enteiros racionais.*

---

[20]Cf. P. Stäckel: "Über Goldbach's empirisches Theorem", *Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1896, e Landau, *ibid.*, 1900.

[21]*Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung*, "Ueber die Theorie der algebraischen Zahlkörper", vol. 4 (1897), Part V.

[22]*Math. Annalen*, vol. 51 e *Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1898.

11. FORMAS CADRÁTICAS CON CALESQUERA COEFICIENTES NUMÉRICOS ALXEBRAICOS.

O noso coñecemento presente da teoría de corpos de números cadráticos[23] colócanos nunha posición de *atacar con éxito a teoría de formas cadráticas con calquera número de variables e con calesquera coeficientes numéricos alxebraicos.* Isto conduce en particular ao interesante problema: resolver unha ecuación cadrática dada con coeficientes numéricos alxebraicos en calquera número de variables por números enteiros ou fraccionarios pertencentes ao dominio de racionalidade alxebraico determinado polos coeficientes.

O seguinte problema importante pode constituír unha transición á álxebra e a teoría de funcións:

12. EXTENSIÓN DO TEOREMA DE KRONECKER SOBRE CORPOS ABELIANOS A CALQUERA DOMINIO DE RACIONALIDADE ALXEBRAICO.

O teorema de que todo corpo abeliano de números xorde a partir do dominio de números racionais pola composición de corpos de raíces da unidade é debido a Kronecker. Este teorema fundamental na teoría de ecuacións integrais contén dous enunciados, a saber:

Primeiro. Responde á cuestión sobre o número e existencia daquelas ecuacións que teñen un grao dado, un grupo abeliano dado e un discriminante dado con respecto ao dominio dos números racionais.

Segundo. Establece que as raíces de tales ecuacións forman un dominio de números alxebraico que coincide co dominio obtido asignando ao argumento z na función exponencial $e^{i\pi z}$ todos os valores numéricos racionais en sucesión.

O primeiro enunciado está relacionado coa cuestión da determinación de certos números alxebraicos polos seus grupos e a súa ramificación. Esta cuestión corresponde, por tanto, ao coñecido problema da determinación de funcións alxebraicas correspondentes a superficies de Riemann dadas. O segundo enunciado proporciona os números requiridos por medios transcendentes, a saber, pola función exponencial $e^{i\pi z}$.

Dado que o dominio dos corpos de números cadráticos imaxinarios é o máis simple despois do dominio dos números racionais, xorde o problema, estender o teorema de Kronecker a este caso. O mesmo Kronecker fixo o aserto de que as ecuacións abelianas no dominio dun corpo cadrático están dadas polas ecuacións de transformación de funcións elípticas con módulos singulares, de xeito que a función elíptica asume aquí o mesmo papel que a función exponencial no caso anterior. A demostración da conxectura de Kronecker non foi aínda proporcionada; pero eu creo que debe ser obtible sen gran dificultade sobre a base da teoría de multiplicación complexa desenvolvida por H. Weber[24] coa axuda dos teoremas puramente aritméticos sobre corpos de clase que eu establecín.

Finalmente, a extensión do teorema de Kronecker ao caso que, *en lugar do dominio de números racionais ou do corpo cadrático imaxinario, se establece como dominio de racionalidade un corpo alxebraico calquera*, paréceme da maior importancia. Considero este problema como un dos máis profundos e transcendentais na teoría de números e de funcións.

---

[23] Hilbert, "Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlenkörper", *Math. Annalen*, vol. 45; "Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper", *Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1897, e *Math. Annalen*, vol. 51; "Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Körper", *Nachrichten d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1898; Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, Cap. VIII, §83 [Traducido por Townsend, Chicago, 1902]. Cf. tamén a tese doutoral de G. Rückle, Göttingen, 1901.

[24] Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig, 1891.

O problema encóntrase accesible dende moitos puntos de vista. Considero como a máis importante clave para a parte aritmética deste problema a lei xeral de reciprocidade para residuos de potencias l-ésimas dentro de calquera corpo de números dado.

En canto á parte de teoría de funcións do problema, o investigador nesta atractiva rexión será guiado polas notables analoxías que se detectan entre a teoría de funcións alxebraicas dunha variable e a teoría de números alxebraicos. Hensel[25] propuxo e investigou o análogo na teoría de números alxebraicos ao desenvolvemento en serie de potencias dunha función alxebraica; e Landsberg[26] tratou o análogo ao teorema de Riemann-Roch. A analoxía entre o xénero dunha superficie de Riemann e o número de clase dun corpo de números é tamén evidente. Consideremos unha superficie de Riemann de xénero $p = 1$ (para tocar brevemente o caso máis simple) e por outra banda un corpo de números de clase $h = 2$. Á demostración da existencia dunha integral finita en todas partes sobre a superficie de Riemann, corresponde a demostración da existencia dun enteiro α no corpo de números tal que o número $\sqrt{\alpha}$ representa un corpo cadrático, relativamente non ramificado con respecto ao corpo fundamental. Na teoría de funcións alxebraicas, o método de valores de contorno (*Randwerthaufgabe*) serve, como é ben coñecido, para a demostración do teorema de existencia de Riemann. Tamén na teoría de corpos de números, a demostración da existencia de soamente este número α ofrece a maior dificultade. Esta demostración lógrase coa indispensable axuda do teorema de que no corpo de números hai sempre ideais primos correspondentes con propiedades de residuo dado. Este último feito é por tanto o análogo en teoría de números ao problema de valores de contorno.

A ecuación do teorema de Abel na teoría de funcións alxebraicas expresa, como é ben coñecido, a condición necesaria e suficiente de que os puntos en cuestión sobre a superficie de Riemann sexan os ceros dunha función alxebraica pertencente á superficie. O análogo exacto do teorema de Abel, na teoría do corpo de números de clase $h = 2$, é a ecuación da lei de reciprocidade cadrática[27]

$$\left(\frac{\alpha}{j}\right) = +1,$$

a cal afirma que o ideal j é un ideal principal do corpo de números se e só se o residuo cadrático do número α con respecto ao ideal j é positivo.

Será visto que no problema que acabamos de esbozar as tres ramas fundamentais das matemáticas, teoría de números, álxebra e teoría de funcións, entran no seu máis íntimo contacto, e estou seguro de que a teoría de funcións analíticas de varias variables en particular sería especialmente enriquecida se un tivera éxito *en atopar e discutir aquelas funcións que xogan para calquera corpo de números alxebraico o papel correspondente ao da función exponencial no corpo de números racionais e das funcións modulares elípticas no corpo de números cadráticos imaxinarios.*

Pasando á álxebra, mencionarei un problema da teoría de ecuacións e un ao que me conduciu a teoría de invariantes alxebraicos.

---

[25] *Jahresberg. d. Deustchen Math.-Vereinigung*, vol. 6, e un artigo próximo a aparecer en *Math. Annalen* [Vol. 55, p. 301]: "Ueber die Entwickelung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen".

[26] *Math. Annalen*, vol. 50 (1898).

[27] Cf. Hilbert, "Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper", *Gött. Nachrichten*, 1898.

13. IMPOSIBILIDADE DA SOLUCIÓN DA ECUACIÓN XERAL DE SÉTIMO GRAO POR MEDIO DE FUNCIÓNS UNICAMENTE DE DOUS ARGUMENTOS.

A nomografía[28] trata co problema: resolver ecuacións por medio dos debuxos de familias de curvas dependentes dun parámetro arbitrario. Parece de inmediato que toda raíz dunha ecuación cuxos coeficientes dependen unicamente de dous parámetros, é dicir, toda función de dúas variables independentes, pode ser representada de diversas maneiras de acordo co principio que xace na base da nomografía. Ademais, unha gran clase de funcións de tres ou máis variables pode evidentemente ser representada por este principio só sen o uso de elementos variables, concretamente todas aquelas que poden ser xeradas formando primeiro unha función de dous argumentos, igualando entón cada un destes argumentos a unha función de dous argumentos, substituíndo despois cada un destes argumentos á súa vez por unha función de dous argumentos, e así sucesivamente, considerando como admisible calquera número finito de insercións de funcións de dous argumentos. Así, por exemplo, toda función racional de calquera número de argumentos pertence a esta clase de funcións construídas por táboas nomográficas; porque pode ser xerada polos procesos de adición, subtracción, multiplicación e división, e cada un destes procesos produce unha función de unicamente dous argumentos. Vese doadamente que as raíces de todas as ecuacións que son resolubles por radicais no dominio de racionalidade natural pertencen a esta clase de funcións; pois aquí a extracción de raíces engádese ás catro operacións aritméticas e isto, certamente, amosa unha función de unicamente un argumento. Igualmente as ecuacións xerais de quinto e sexto graos son resolubles por táboas nomográficas adecuadas; pois, por medio de transformacións de Tschirnhausen, as cales requiren unicamente extracción de raíces, poden ser reducidas a unha forma onde os coeficientes dependen só de dous parámetros.

Agora é probable que a raíz da ecuación de sétimo grao sexa unha función dos seus coeficientes que non pertenza a esta clase de funcións aptas para construción nomográfica, i. e., que non poda ser construída por un número finito de insercións de funcións de dous argumentos. Para probar isto, cumpriría a demostración de *que a ecuación de sétimo grao* $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ *non é resoluble coa axuda de calesquera funcións continuas de unicamente dous argumentos.* Permítaseme engadir que eu mesmo comprobei mediante un rigoroso proceso que existen funcións analíticas de tres argumentos x, y, z que non poden ser obtidas por unha cadea finita de funcións de só dous argumentos.

Empregando variables auxiliares, a nomografía logra construír funcións de máis de dous argumentos, como d'Ocagne probou recentemente no caso da ecuación de sétimo grao[29].

14. DEMOSTRACIÓN DA FINITUDE DE CERTOS SISTEMAS COMPLETOS DE FUNCIÓNS.

Na teoría de invariantes alxebraicos, cuestións como a finitude de sistemas completos merecen, paréceme a min, un interese particular. L. Maurer[30] logrou recentemente estender os teoremas de finitude en teoría de invariantes probados por P. Jordan e eu mesmo ao caso onde, no canto do grupo proxectivo xeral, é escollido calquera subgrupo como a base para a definición de invariantes.

Un importante paso nesta dirección foi xa dado por A. Hurwitz,[31] quen mediante un enxeñoso proceso, logrou efectuar a demostración, na súa enteira xeneralidade, da finitude do sistema de invariantes ortogonais dunha forma base arbitraria.

[28] d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris, 1899.

[29] "Sur la résolution nomographique de l'equation du septième degré". *Comptes rendus*, Paris, 1900.

[30] Cf. *Sitzungsber. d. K. Acad. d. Wiss. zu München*, 1899, e un artigo por aparecer en *Math. Annalen*.

[31] "Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration", *Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen*, 1897.

O estudio da cuestión da finitude de invariantes conduciume a un problema simple que inclúe esa cuestión como un caso particular e cuxa solución require probablemente un estudio sen dúbida máis minuciosamente detallado da teoría de eliminación e dos sistemas modulares alxebraicos de Kronecker que o que foi feito ata agora.

Sexa un número m de funcións racionais enteiras X_1, X_2, ..., X_m das n variables dadas x_1, x_2, ..., x_n,

$$(S) \qquad \begin{aligned} X_1 &= f_1(x_1, ..., x_n), \\ X_2 &= f_2(x_1, ..., x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= f_m(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Toda combinación enteira racional de X_1, X_2, ..., X_m debe evidentemente converterse sempre, despois da substitución das anteriores expresións, nunha función enteira racional de x_1, x_2, ..., x_n. Porén, ben pode haber funcións fraccionarias racionais de X_1, X_2, ..., X_m as cales, pola operación de substitución S, convértense en funcións enteiras en x_1, x_2, ..., x_n. Eu propoño chamar a toda función racional de X_1, X_2, ..., X_m que se converta en enteira en x_1, x_2, ..., x_n despois da aplicación da substitución S, función *relativamente enteira* de X_1, X_2, ..., X_m. Toda función enteira de X_1, X_2, ..., X_m é evidentemente tamén relativamente enteira; ademais a suma, diferenza e produto de funcións relativamente enteiras son tamén relativamente enteiras.

O problema resultante é agora decidir se é sempre posible *atopar un sistema finito de funcións relativamente enteiras X_1, X_2, ..., X_m polas cales toda outra función relativamente enteira de X_1, X_2, ..., X_m poda ser expresada de maneira racional e enteira.*

Podemos formular o problema aínda máis simplemente se introducimos a idea dun corpo de integridade finito. Por un corpo de integridade finito entendo un sistema de funcións de entre as que pode ser elixido un número finito de funcións, en termos das cales todas as demais funcións do sistema son expresables de maneira racional e enteira. O noso problema equivale, daquela, a este: probar que todas as funcións relativamente enteiras de calquera dominio de racionalidade dado constitúen sempre un corpo de integridade finito.

Tamén se nos ocorre naturalmente refinar o problema mediante restricións recollidas da teoría de números, supoñendo que os coeficientes das funcións dadas f_1, ..., f_m son enteiros e incluíndo entre as funcións relativamente enteiras de X_1, X_2, ..., X_m unicamente tales funcións racionais destes argumentos que se converten, pola aplicación das substitucións S, en funcións racionais enteiras de x_1, x_2, ..., x_n con coeficientes enteiros racionais.

O seguinte é un simple caso particular deste problema refinado: Sexan m funcións racionais enteiras X_1, X_2, ..., X_m dunha variable x con coeficientes racionais enteiros, e un número primo p dado. Consideremos o sistema daquelas funcións racionais enteiras de x que poden ser expresadas da forma

$$\frac{G(X_1, ..., X_m)}{p^h},$$

onde G é unha función racional enteira dos argumentos X_1, X_2, ..., X_m e p^h é calquera potencia do número primo p. As miñas anteriores investigacións[32] proban inmediatamente que todas as tales expresións para un expoñente fixo h forman un dominio de integridade finito. Pero a cuestión aquí é se o mesmo é certo para todos os expoñentes h, i. e., se pode ser elixido un número finito de tales expresións por medio das cales para todo expoñente h calquera outra expresión desa forma é expresable de maneira racional e enteira.

Dende a rexión fronteira entre álxebra e xeometría, mencionarei dous problemas. O primeiro afecta á xeometría enumerativa e o outro á topoloxía de curvas e superficies alxebraicas.

[32] *Math. Annalen*, vol. 36 (1890), p. 485.

15. FUNDAMENTACIÓN RIGOROSA DO CÁLCULO ENUMERATIVO DE SCHUBERT.

O problema consiste nisto: *establecer rigorosamente e cunha determinación exacta dos límites da súa validez aqueles números xeométricos que Schubert*[33] *determinou especialmente sobre a base do chamado principio de posición especial, ou conservación de número, por medio do cálculo enumerativo por el desenvolvido.*

Malia que a álxebra de hoxe garante, en principio, a posibilidade de realizar os procesos de eliminación, para a demostración dos teoremas de xeometría enumerativa requírese decididamente aínda algo máis, a saber, a realización de feito do proceso de eliminación no caso de ecuacións de forma especial de xeito que o grao das ecuacións finais e a multiplicidade das súas solucións podan ser previstas.

16. PROBLEMA DA TOPOLOXÍA DE CURVAS E SUPERFICIES ALXEBRAICAS.

O máximo número de ramas pechadas e independentes que unha curva alxebraica plana de n-ésima orde pode ter foi determinado por Harnack[34]. Alí xorde ademais a cuestión sobre a posición relativa das ramas no plano. Con respecto ás curvas da sexta orde, eu mesmo comprobei -mediante un proceso complicado, é certo-, que das once ramas que poden ter de acordo con Harnack, non todas poden xacer externas unha á outra, senón que debe existir unha rama en cuxo interior xace unha rama e en cuxo exterior xacen nove ramas, ou inversamente. *Unha minuciosa investigación da posición relativa das ramas independentes cando o seu número é o máximo paréceme ser de moi grande interese, e non menos tamén a correspondente investigación respecto do número, forma e posición das follas dunha superficie alxebraica no espazo.* Ata agora, certamente, non é aínda coñecido cal é o número máximo de follas que pode ter realmente unha superficie da cuarta orde no espazo tridimensional.[35]

En conexión con este problema puramente alxebraico, desexo adiantar unha cuestión a cal, paréceme, pode ser atacada polo mesmo método de variación continua de coeficientes, e cuxa resposta é de valor correspondente para a topoloxía de familias de curvas definidas por ecuacións diferenciais. É a cuestión do número máximo e posición dos ciclos fronteira de Poincaré (ciclos límite) para unha ecuación diferencial de primeiros orde e grao da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

onde X e Y son funcións racionais enteiras de n-ésimo grao en x e y. Escrita de xeito homoxéneo, isto é,

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

onde X, Y e Z son funcións racionais enteiras homoxéneas de n-ésimo grao en x, y, z, e as últimas deben ser determinadas como funcións do parámetro t.

[33]Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879.

[34]*Math. Annalen*, vol. 10.

[35]Cf. Rohn, "Flächen vierter Ordnung", Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig, 1886.

17. EXPRESIÓN DE FORMAS DEFINIDAS POR CADRADOS.

Unha función ou forma racional enteira en calquera número de variables con coeficientes reais tal que non se fai negativa para ningún valor real destas variables, dise *definida*. O sistema de todas as formas definidas é invariante con respecto ás operacións de adición e multiplicación, pero o cociente de dúas formas definidas –no caso que fora unha función enteira das variables– é tamén unha forma definida. O cadrado de calquera forma é sempre evidentemente unha forma definida. Pero dado que, como eu teño probado,[36] non toda forma definida pode ser composta por adición de cadrados de formas, xorde a cuestión –que respondín afirmativamente para formas ternarias–[37] de se toda forma definida non pode ser expresada como un cociente de sumas de cadrados de formas. Ao mesmo tempo é desexable, para certas cuestións con respecto á posibilidade de certas construcións xeométricas, saber se os coeficientes das formas para ser usados na expresión poden ser sempre collidos do dominio de racionalidade dado polos coeficientes da forma representada.[38]

Menciono un problema xeométrico máis:

18. CONSTRUCIÓN DO ESPAZO A PARTIRES DE POLIEDROS CONGRUENTES.

Se preguntamos por aqueles grupos de movementos no plano para os cales existe unha rexión fundamental, obtemos diferentes respostas, segundo o plano considerado sexa de Riemann (elíptico), de Euclides, ou de Lobachevsky (hiperbólico). No caso do plano elíptico existe un número finito de tipos esencialmente diferentes de rexións fundamentais, e un número finito de rexións congruentes abonda para un completo recubrimento do plano enteiro; o grupo consiste certamente nun número finito de movementos unicamente. No caso do plano hiperbólico existe un número infinito de tipos esencialmente diferentes de rexións fundamentais, a saber, os ben coñecidos polígonos de Poincaré. Para o completo recubrimento do plano cómpre un número infinito de rexións congruentes. O caso do plano de Euclides está entre estes; pois neste caso existe unicamente un número finito de tipos esencialmente diferentes de grupos de movementos con rexións fundamentais, pero para un completo recubrimento do plano enteiro cómpre un número infinito de rexións congruentes.

Exactamente os feitos correspondentes son atopados no espazo de tres dimensións. O feito da finitude dos grupos de movementos no espazo elíptico é unha consecuencia inmediata dun teorema fundamental de C. Jordan,[39] por medio do cal o número de tipos esencialmente diferentes de grupos finitos de substitucións lineais en n variables non supera un certo límite finito dependente de n. Os grupos de movementos con rexións fundamentais no espazo hiperbólico foron investigados por Fricke e Klein nas leccións sobre a teoría de funcións automórficas,[40] e finalmente Fedorov[41], Schoenflies[42] e recentemente Rohn[43] deron a demostración de que existen, no espazo euclídeo, unicamente un número finito de tipos esencialmente diferentes de grupos de movementos cunha rexión fundamental. Agora ben, mentres os resultados e

[36] *Math. Annalen*, vol. 32.
[37] *Acta Mathematica*, vol. 17.
[38] Cf. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, Cap. 7 e en particular §38.
[39] *Crelle's Journal*, vol. 84 (1878), e *Atti d. Reale Acad. di Napoli* 1880.
[40] Leipzig, 1897. Cf. especialmente Abschnitt I, Capítulos 2 e 3.
[41] Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren, 1890.
[42] Krystallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig, 1891.
[43] *Math. Annalen*, vol. 53.

métodos de demostración aplicables ao espazo elíptico e hiperbólico valen directamente tamén para o espazo n-dimensional, a xeneralización do teorema para o espazo euclídeo parece ofrecer indubidables dificultades. A investigación da seguinte cuestión é por iso desexable: *existe tamén no espazo euclídeo n-dimensional unicamente un número finito de tipos esencialmente diferentes de grupos de movementos cunha rexión fundamental?*

Unha rexión fundamental de cada grupo de movementos, xunto coas rexións congruentes que xorden do grupo, enche evidentemente o espazo completamente. Xorde a cuestión: *Se tamén existen poliedros que non aparecen como rexións fundamentais de grupos de movementos, por medio dos cales non obstante mediante unha adecuada xustaposición de copias congruentes é posible encher por completo todo o espazo.* Sinalo a seguinte cuestión, relacionada coa precedente, e importante para a teoría de números e se cadra ás veces útil para a física e a química: Como se pode ordenar do xeito máis denso no espazo un número infinito de sólidos iguais de forma dada, e. g., esferas con radios dados ou tetraedros regulares con arestas dadas (ou en posición prescrita), é dicir, como se poden encaixar para que a razón do espazo enchido ao non enchido poda ser a maior posible?

Se botamos unha ollada ao desenvolvemento da teoría de funcións no último século, decatámonos por riba de todo da importancia fundamental desa clase de funcións que agora designamos como funcións analíticas, –unha clase de funcións que probablemente estará permanentemente no centro do interese matemático–.

Existen moitos puntos de vista diferentes dende os cales poderiamos elixir, entre a totalidade de todas as funcións concibibles, clases extensas merecedoras dunha investigación particularmente minuciosa. Consideremos, por exemplo, *a clase das funcións caracterizadas por ecuacións diferenciais alxebraicas ordinarias ou en derivadas parciais.* Debería observarse que esta clase non contén as funcións que se presentan na teoría de números e cuxa investigación é da maior importancia. Por exemplo, a función antes mencionada $\zeta(s)$ non satisfai ecuación diferencial alxebraica ningunha, como se ve facilmente coa axuda da ben coñecida relación entre $\zeta(s)$ e $\zeta(1-s)$, se un se remite ao teorema probado por Holder[44], de que a función $\Gamma(x)$ non satisfai ecuación diferencial alxebraica ningunha. De novo, a función das dúas variables s e x definida polas series infinitas

$$\zeta(s,x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + ...,$$

que están en íntima relación coa función $\zeta(s)$, probablemente non satisfai ecuación en derivadas parciais ningunha. Na investigación desta cuestión terá que ser usada a ecuación funcional

$$x\frac{\partial \zeta(s,x)}{\partial x} = \zeta(s-1,x).$$

Se, por outra banda, somos conducidos por razóns aritméticas ou xeométricas a considerar a clase de todas as funcións que son continuas e indefinidamente diferenciables, estariamos obrigados na súa investigación a prescindir dese instrumento flexible, as series de potencias, e da circunstancia de que a función está completamente determinada pola asignación de valores en calquera rexión, por pequena que sexa. Mentres, por tanto, a primeira limitación do campo de funcións era demasiado estreita, a segunda paréceme demasiado ampla.

A idea da función analítica, por outra banda, inclúe toda a riqueza das funcións máis importantes para a ciencia, xa teñan a súa orixe na teoría de números, na teoría de ecuacións diferenciais ou de ecuacións funcionais alxebraicas, xa xurdan en xeometría ou en física matemática; e, xa que logo, en todo o dominio de funcións, a función analítica posúe xustamente a supremacía indiscutida.

[44] *Math. Annalen*, vol. 28.

19. SON SEMPRE NECESARIAMENTE ANALÍTICAS AS SOLUCIÓNS DE PROBLEMAS

Un dos máis notables feitos nos elementos da teoría de funcións analíticas paréceme este: Que existen ecuacións en derivadas parciais cuxas integrais son todas por necesidade funcións analíticas das variables independentes, é dicir, en síntese, ecuacións susceptibles de nada máis que solucións analíticas. As máis coñecidas ecuacións en derivadas parciais deste tipo son a ecuación do potencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

e certas ecuacións diferenciais lineais investigadas por Picard;[45] tamén a ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f,$$

a ecuación en derivadas parciais das superficies mínimas, e outras. A maioría destas ecuacións en derivadas parciais teñen a característica común de ser as ecuacións diferenciais lagranxianas de certos problemas de variación, concretamente, de problemas de variación

$$\int\int F(p, q, z; x, y)dxdy = minimum$$

$$\left[p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

tales que satisfán, para todos os valores dos argumentos que caen dentro do rango de discusión, a desigualdade

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right)^2 > 0,$$

sendo a mesma F unha función analítica. Chamaremos a este tipo de problema un problema de variación regular. Son principalmente os problemas de variación regular os que xogan un papel en xeometría, en mecánica, e en física matemática; e a cuestión xorde naturalmente, se todas as solucións dos problemas de variación regular deben ser necesariamente funcións analíticas. Noutras palabras, t*oda ecuación en derivadas parciais lagranxianas dun problema de variación regular ten a propiedade de admitir exclusivamente integrais analíticas?* E é este o caso mesmo cando a función está restrinxida a tomar, como, e. g., no problema de Dirichlet sobre a función potencial, valores de contorno que son continuos, pero non analíticos?

Podo engadir que existen superficies de curvatura gaussiana negativa constante que son representables mediante funcións que son continuas e posúen certamente todas as derivadas, e aínda así non son analíticas; mentres por outra banda é probable que toda superficie cuxa curvatura gaussiana é constante e positiva sexa necesariamente unha superficie analítica. E sabemos que as superficies de curvatura constante positiva están máis intimamente relacionadas con este problema de variación regular: pasar a través dunha curva pechada no espazo unha superficie de área mínima a cal encerrará, en conexión cunha superficie fixa que atravesa a mesma curva pechada, un volume de magnitude dada.

---

[45] *Jour. de l'Ecole Polytech.*, 1890.

20. O PROBLEMA XERAL DOS VALORES DE CONTORNO.

Un importante problema intimamente conectado co precedente é a cuestión concernente á existencia de solucións de ecuacións en derivadas parciais cando os valores na fronteira da rexión están prescritos. Este problema está resolto no principal polos sagaces métodos de H. A. Schwarz, C. Neumann, e Poincaré para a ecuación diferencial do potencial. Porén, estes métodos parecen ser xeralmente non aptos para extensión directa ao caso onde ao longo da fronteira hai prescritos ou os coeficientes diferenciais ou calesquera relacións entre estes e os valores da función. Nin poden ser estendidos inmediatamente ao caso onde a pregunta non é sobre superficies potenciais senón, digamos, sobre superficies de área mínima, ou superficies de curvatura gaussiana constante positiva, as cales teñen que pasar a través dunha curva trenzada prescrita ou alongarse sobre unha superficie anular dada. É a miña convicción de que será posible probar estes teoremas de existencia por medio dun principio xeral cuxa natureza está indicada polo principio de Dirichlet. Este principio xeral entón permitiranos quizais achegarnos á cuestión: *Non ten unha solución todo problema de variación regular, satisfeitas certas hipóteses relacionadas coas condicións de contorno dadas* (por exemplo que as funcións implicadas nesas condicións de contorno sexan continuas e teñan en seccións unha ou máis derivadas) *e suposto tamén, se é necesario, que se estenda adecuadamente a noción dunha solución?*[46]

21. DEMOSTRACIÓN DA EXISTENCIA DE ECUACIÓNS DIFERENCIAIS LINEAIS QUE TEÑEN PRESCRITO UN GRUPO MONODRÓMICO.

Na teoría de ecuacións diferenciais lineais cunha variable independente z, desexo sinalar un importante problema, un dos cales moi probablemente o propio Riemann puido ter en mente. Este problema é o seguinte: *Probar que sempre existe unha ecuación diferencial lineal da clase fuchsiana, con puntos singulares e grupo monodrómico dados.* O problema require a creación de n funcións da variable z, regulares en todo o plano complexo z excepto nos puntos singulares dados; neses puntos as funcións poden chegar a ser infinitas de orde unicamente finita, e cando z describe circuítos arredor deses puntos as funcións experimentarán as substitucións lineais prescritas. A existencia de tales ecuacións diferenciais amosouse probable contando as constantes, pero a demostración rigorosa foi obtida ata o de agora unicamente no caso particular de que as ecuacións fundamentais das substitucións dadas teñen todas as raíces de magnitude absoluta unidade. L. Schlesinger deu esta demostración[47], baseada na teoría de Poincaré das ζ-funcións fuchsianas. A teoría de ecuacións diferenciais lineais tería evidentemente unha aparencia máis acabada se o problema aquí esbozado puidera ser resolvido mediante algún método perfectamente xeral.

22. UNIFORMIZACIÓN DE RELACIÓNS ANALÍTICAS POR MEDIO DE FUNCIÓNS

Como Poincaré foi o primeiro en probar, é sempre posible para reducir calquera relación alxebraica entre dúas variables uniformizar mediante o uso de funcións automorfas dunha variable. É dicir, se é dada calquera ecuación alxebraica en dúas variables, sempre poden ser atopadas para estas variables dúas de tales funcións automorfas univaluadas dunha soa variable tales que a súa substitución converte á ecuación alxebraica dada nunha identidade. A xeneralización deste teorema fundamental a calesquera

[46] Cf. a miña conferencia sobre o principio de Dirichlet en *Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung*, vol. 8 (1900), p. 184.

[47] Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, vol. 2, part 2, No. 366.

relacións analíticas non alxebraicas entre dúas variables foi así mesmo intentada con éxito por Poincaré[48], aínda que por un camiño completamente diferente do que se serviu no problema especial mencionado primeiro. Porén, da demostración de Poincaré da posibilidade de reducir á uniformidade unha relación analítica arbitraria entre dúas variables, non chega a ser evidente se poden ser determinadas as funcións solución para que presenten certas condicións adicionais. Concretamente, non está probado se as dúas funcións univaluadas da nova variable poden ser escollidas de xeito que, mentres esta variable recorre o dominio *regular* daquelas funcións, a totalidade dos puntos regulares do corpo analítico dado son de feito alcanzados e representados. Pola contra parece ser o caso, polas investigacións de Poincaré, que existen ademais dos puntos de ramificación outros, en xeral infinitos puntos excepcionais discretos do corpo analítico, que poden ser alcanzados unicamente facendo que a nova variable se achegue a certos puntos límite das funcións. *En vista da fundamental importancia da formulación da cuestión por Poincaré, paréceme que é extremadamente desexable unha aclaración e solución desta dificultade.*

En conxunción con este problema xorde o problema de reducir a uniformidade unha relación alxebraica ou calquera outra analítica entre tres ou máis variables complexas, –un problema do cal é coñecido que é resoluble en moitos casos particulares–. Cara á súa solución as recentes investigacións de Picard sobre funcións alxebraicas de dúas variables deben ser consideradas como estudios preliminares importantes e benvidos.

23. DESENVOLVEMENTO MÁIS EXTENSO DOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE VARIACIÓNS.

Ata aquí, mencionei en xeral problemas o máis definidos e especiais posible, na opinión de que son precisamente tales problemas definidos e especiais os que máis nos atraen e os que a miúdo exerceron a máis perdurable influencia sobre a ciencia. Porén, gustaríame concluír cun problema xeral, concretamente coa indicación dunha rama das matemáticas repetidamente mencionada nesta conferencia, –a cal, malia o considerable avance que recentemente lle deu Weierstrass, non recibe o recoñecemento xeral que, na miña opinión, élle debido– . Refírome ao cálculo de variacións.[49]

A falta de interese nisto é se cadra debida en parte á necesidade de libros de texto modernos fiables. Tanto é isto así que fai máis loable que A. Kneser nun traballo publicado moi recentemente tratara o cálculo de variacións dende os modernos puntos de vista e considerando a moderna demanda de rigor.[50]

O cálculo de variacións é, no máis amplo sentido, a teoría da variación de funcións, e como tal aparece como unha extensión necesaria do cálculo diferencial e integral. Neste senso, investigacións de Poincaré sobre o problema dos tres corpos, por exemplo, constitúen un capítulo do cálculo de variacións, en tanto que Poincaré deriva dende órbitas coñecidas polo principio de variación novas órbitas de carácter similar.

Engado aquí unha curta xustificación dos comentarios xerais sobre o cálculo de variacións feitos ao inicio da miña conferencia.

É coñecido que o problema máis simple no cálculo de variacións consiste en atopar unha función y dunha variable x tal que a integral definida

$$J = \int_a^b F(y_x, y; x)dx, y_x = \frac{dy}{dx}$$

[48] *Bull. de la Soc. Math. de France*, vol. 11 (1883).

[49] Libros de texto: Moigno-Lindelöf, Leçons du calcul des variations, Paris, 1861, e A. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, Braunschweig, 1900.

[50] Como unha indicación dos contidos deste traballo, pode sinalarse aquí que para os problemas máis simples Kneser obtén condicións suficientes de extremo mesmo para o caso no que un límite de integración é variable, e emprega a envolvente dunha familia de curvas satisfacendo as ecuacións diferenciais do problema para probar a necesidade das condicións de Jacobi de extremo. Ademais, debe resaltarse que Kneser aplica a teoría de Weierstrass tamén para a investigación do extremo de cantidades como as que están definidas por ecuacións diferenciais.

tome un valor mínimo comparado cos valores que toma cando y é substituído por outras funcións de x cos mesmos valores inicial e final.

A anulación da primeira variación no sentido usual

$$\delta J = 0$$

dá para a función desexada y a ben coñecida ecuación diferencial

$$\frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0, \tag{1}$$

$$\left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right].$$

De cara a investigar máis a fondo criterios necesarios e suficientes para a existencia do mínimo requirido, consideremos a integral

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p)F_p\}dx,$$

$$\left[F = F(p, y; x), F_p = \frac{\partial F(p, y; x)}{\partial p}\right].$$

Agora investigamos como debe ser escollido p como función de x, y, para que o valor desta integral J^* sexa independente do camiño de integración, i. e., da elección da función y da variable x.

A integral J^* ten a forma

$$J^* = \int_a^b \{Ay_x - B\}dx,$$

onde A e B non conteñen y_x e a anulación da primeira variación

$$\delta J^* = 0$$

no sentido que require a nova cuestión dá a ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

i. e., obtemos para a función p das dúas variables x, y a ecuación en derivadas parciais de primeira orde

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0.$$

A ecuación diferencial ordinaria de segunda orde (1) e a ecuación en derivadas parciais (1*) están na máis íntima relación unha coa outra. Esta relación chega a ser inmediatamente clara para nós mediante a seguinte transformación simple

$$\begin{aligned}
\delta J^* &= \int_a^b \{F_y\delta y + F_p\delta p + (\delta y_x - \delta p)F_y + (y_x - p)\delta F_p\}dx \\
&= \int_a^b \{F_y\delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\delta F_p\}dx \\
&= \delta J + \int_a^b (y_x - p)\delta F_p dx.
\end{aligned}$$

Derivamos disto, concretamente, os seguintes feitos: Se construímos calquera familia simple de curvas integrais da ecuación diferencial ordinaria (1) de segunda orde e logo formamos unha ecuación diferencial ordinaria de primeira orde

$$(2) \qquad y_x = p(x, y)$$

que tamén admite estas curvas integrais como solucións, entón a función $p(x, y)$ é sempre unha integral da ecuación en derivadas parciais (1^*) de primeira orde; e reciprocamente, se $p(x, y)$ denota calquera solución da ecuación en derivadas parciais (1^*) de primeira orde, todas as integrais non singulares da ecuación diferencial ordinaria (2) de primeira orde son ao mesmo tempo integrais da ecuación diferencial (1) de segunda orde, ou en síntese se $y_x = p(x, y)$ é unha ecuación integral de primeira orde da ecuación diferencial (1) de segunda orde, $p(x, y)$ representa unha integral da ecuación en derivadas parciais (1^*) e reciprocamente; as curvas integrais da ecuación diferencial ordinaria de segunda orde son polo tanto, ao mesmo tempo, as características da ecuación en derivadas parciais (1^*) de primeira orde.

No caso presente podemos atopar o mesmo resultado por medio dun simple cálculo; pois este dános as ecuacións diferenciais (1) e (1^*) en cuestión na forma

$$(1) \qquad y_{xx}F_{y_x y_x} + y_x F_{y_x x} + F_{y_x x} - F_y = 0,$$

$$(1^*) \qquad (p_x + pp_y)F_{pp} + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0,$$

onde os subíndices indican as derivadas parciais con respecto a x, y, p, y_x. Disto é clara a corrección da relación afirmada.

A íntima relación derivada antes e recentemente probada entre a ecuación diferencial ordinaria (1) de segunda orde e a ecuación en derivadas parciais (1^*) de primeira orde é, paréceme a min, de importancia fundamental para o cálculo de variacións. Pois, do feito de que a integral J^* é independente do camiño de integración, séguese que

$$(3) \qquad \int_a^b \{F(p) + (y_x - p)F_p(p)\}dx = \int_a^b F(\overline{y}_x)dx,$$

se consideramos que a integral do lado esquerdo é collida ao longo de calquera camiño y e a integral do lado dereito ao longo dunha curva integral $\overline{y}$ da ecuación diferencial

$$\overline{y}_x = p(x, \overline{y}).$$

Coa axuda da ecuación (3) chegamos á fórmula de Weierstrass

$$(4) \qquad \int_a^b F(y_x)dx - \int_a^b F(\overline{y}_x)dx = \int_a^b E(y_x, p)dx,$$

onde E designa a expresión de Weierstrass, dependente de y_x, p, y, x,

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F(p) - (y_x - p)F_p(p).$$

Dado que, por tanto, a solución depende unicamente de atopar unha integral $p(x, y)$ que é univaluada e continua nun certo entorno da curva integral $\overline{y}$, que estamos considerando, os desenvolvementos recentemente indicados conducen inmediatamente –sen a introdución da segunda variación, senón unicamente pola aplicación do proceso polar á ecuación diferencial (1)–, á expresión da condición de Jacobi e á resposta á pregunta: Ata que punto esta condición de Jacobi en conxunción coa condición de Weierstrass $E > 0$ é necesaria e suficiente para a existencia dun mínimo.

Os desenvolvementos sinalados poden ser transferidos sen necesidade de máis cálculos ao caso de dúas ou máis funcións requiridas, e tamén ao caso dunha integral dobre ou múltiple. Así, por exemplo, no caso dunha integral dobre

$$J = \int F(z_x, z_y, z; x, y)d\omega, \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right]$$

para ser estendida sobre unha rexión dada ω, a anulación da primeira variación (entendida no sentido usual)

$$\delta J = 0$$

dá a ben coñecida ecuación diferencial de segunda orde

$$(I) \qquad \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_{z_y}}{\partial y} - F_x = 0,$$

$$\left[F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x}, F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y}, F_z = \frac{\partial F}{\partial z} \right],$$

para a función requirida z de x e y.

Por outra banda consideramos a integral

$$J^* = \int \{F + (z_x - p)F_p + (z_y - q)F_q\} d\omega,$$

$$\left[F = F(p, q, z; x, y), F_p = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial p}, F_q = \frac{\partial F(p, q, z; x, y)}{\partial q} \right],$$

e preguntamos, como deben ser tomados p e q como funcións de x, y e z para que o valor desta integral poda ser independente da elección da superficie que pase a través da curva pechada trenzada dada, i. e., da elección da función z das variables x e y.

A integral J^* ten a forma

$$J^* = \int \{A z_x + B z_y - C\} d\omega$$

e a anulación da primeira variación

$$\delta J^* = 0,$$

no sentido que esixe a nova formulación da cuestión, dá a ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

i. e., atopamos para as funcións p e q das tres variables x, y e z a ecuación diferencial de primeira orde

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial x} = 0.$$

Se engadimos a esta ecuación diferencial a ecuación en derivadas parciais

$$(I^*) \qquad p_y + q p_z = q_x + p q_z,$$

resultante das ecuacións

$$z_x = p(x, y, z), z_y = q(x, y, z),$$

a ecuación en derivadas parciais (I) para a función z das dúas variables x e y e o sistema simultáneo das dúas ecuacións en derivadas parciais en primeira orde (I^*) para as dúas funcións p e q das tres variables x, y e z, están entre si nunha relación exactamente análoga á que estaban as ecuacións diferenciais (1) e (1^*) no caso da integral simple.

Séguese do feito de que a integral J^* é independente da elección da superficie de integración z que

$$\int \{F(p, q) + (z_x - p)F_p(p, q) + (z_y - q)F_q(p, q)\} d\omega = \int F(\overline{z}_x, \overline{z}_y) d\omega,$$

se pensamos que a integral do lado dereito é collida sobre unha superficie integral $\overline{z}$ das ecuacións en derivadas parciais

$$\overline{z}_x = p(x, y, \overline{z}), \overline{z}_y = q(x, y, \overline{z});$$

e coa axuda desta fórmula chegamos axiña á fórmula

$$(IV) \qquad \int F(z_x, z_y) d\omega - \int F(\overline{z}_x, \overline{z}_y) d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q) d\omega,$$
$$[E(z_x, z_y, p, q) = F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p) F_p(p, q) - (z_y - q) F_q(p, q)],$$

a cal xoga o mesmo papel para a variación de integrais dobres que a fórmula previamente dada (4) para integrais simples. Coa axuda desta fórmula podemos agora responder á cuestión de ata que punto a condición de Jacobi en conxunción coa condición de Weierstrass $E > 0$ é necesaria e suficiente para a existencia dun mínimo.

Conectada con estes desenvolvementos está a forma modificada na cal A. Kneser,[51] comezando dende outros puntos de vista, presentou a teoría de Weierstrass. Mentres Weierstrass empregou para derivar condicións suficientes para o extremo aquelas curvas integrais da ecuación (1) que pasan por un punto fixo, por outra banda Kneser fai uso de calquera familia simple de tales curvas e constrúe para toda familia semellante unha solución, característica desa familia, desa ecuación en derivadas parciais, a cal debe ser considerada como unha xeneralización da ecuación de Jacobi-Hamilton.

Os problemas mencionados son simplemente mostras de problemas, pero bastarán para probar can rica, can variada e can extensa é a ciencia matemática de hoxe, e transmítenos a cuestión de se as matemáticas están condenadas ao destino daquelas outras ciencias que se dividiron en ramas separadas, cuxos representantes apenas se entenden uns aos outros e cuxa conexión vólvese cada vez máis imprecisa. Eu nin o creo nin o desexo. A ciencia matemática é na miña opinión un todo indivisible, un organismo cuxa vitalidade é requirida para a conexión das súas partes. Con toda a variedade de coñecemento matemático, aínda somos claramente conscientes da semellanza dos recursos lóxicos, a *relación* das *ideas* en matemáticas como un todo e as numerosas analoxías nos seus diferentes departamentos. Tamén notamos que, canto máis lonxe é desenrolada unha teoría matemática, máis harmoniosa e uniformemente continúa a súa construción, e son reveladas relacións insospeitadas entre ramas separadas ata agora da ciencia. Acontece así que, coa extensión das matemáticas, o seu carácter orgánico non só non se perde senón que se manifesta máis claramente.

Pero, preguntamos, coa extensión do coñecemento matemático, non chegará a ser finalmente imposible para o investigador individual abranguer todos os departamentos deste coñecemento? En resposta déixenme sinalar can meticulosamente está arraigada a ciencia matemática que cada avance real vai man a man coa invención de ferramentas máis enxeñosas e métodos máis simples que ao mesmo tempo axudan a comprender teorías anteriores e desbotan desenrolos máis vellos e máis complicados. É xa que logo posible para o investigador individual, cando fai propias esas ferramentas máis enxeñosas e métodos máis simples, atopar o seu camiño máis facilmente nas diversas ramas das matemáticas do que é posible en calquera outra ciencia.

A unidade orgánica das matemáticas é inherente á natureza desta ciencia, pois a matemática é a base de todo coñecemento exacto dos fenómenos naturais. Oxalá que se poda cumprir completamente esta alta misión, e poda o novo século traer mestres dotados e moitos fervorosos e entusiastas discípulos.

[51] Cf. o seu libro de texto mencionado anteriormente, §§14, 15, 19 and 20.